BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA NĂM 2016

ĐÁP ÁN

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu I

1) Ta có: $\omega = 2\ 1+2i\ +1-2i = 3+2i.$

   Suy ra: phần thực của số phức w bằng 3, phần ảo bằng 2.

2) Ta có: $A = 2\log_2 x - 3\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x = -\frac{1}{2}\log_2 x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot$

Câu II

TXĐ: $D = \mathbb{R}.$

$y' = -4x^3 + 4x = -4x\ \ x^2 - 1\ .$ Cho: $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = -1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right.\cdot$

Tính giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty.$ Suy ra hàm số không có các đường tiệm cận.

Bảng biến thiên:

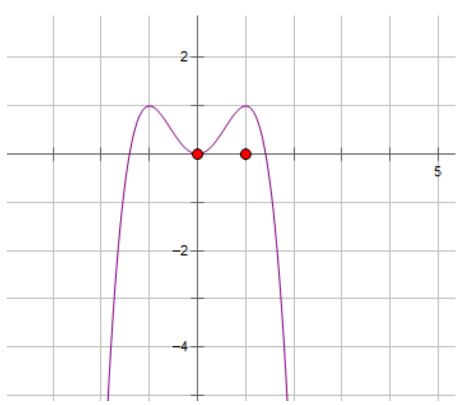
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$ va

Hàm số đồng biến trên các khoảng $\ -\infty;-1\ ,\ \ 0;1\ .$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\ -1;0\ ,\ \ 1;+\infty\ .$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0 \Rightarrow y_{CT} = 0.$ Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm 1 \Rightarrow y_{CĐ} = 1.$



<u>Câu III</u>.

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3 \qquad 1$$

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 3 \Leftrightarrow \ x_1 + x_2 \ ^2 - 2x_1x_2 = 3 \Leftrightarrow 4 - \dfrac{2m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2} \qquad 2$

Từ $\ 1 \ , \ 2 \ \Rightarrow m = \dfrac{3}{2}$ thỏa điều kiện bài toán.

<u>Câu IV</u>.

Ta có: $I = \int\limits_0^3 3x^2dx + \int\limits_0^3 3x\sqrt{x^2 + 16}dx.$

Tính $A = \int\limits_0^3 3x^2dx = x^3\Big|_0^3 = 27.$

Tính $B = \int\limits_0^3 3x\sqrt{x^2 + 16}dx = \int\limits_4^5 3t^2dt = t^3\Big|_4^5 = 61,$ với $t = \sqrt{x^2 + 16}.$

Suy ra: $I = A + B = 88.$

<u>Câu V</u>.

Mặt phẳng $\ P \ $ đi qua $A \ 3;2;-2 \ $, có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{BC} = \ 1;-1;2 \ $ nên có phương trình:

$\ P \ : x - y + 2z + 3 = 0.$

Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng BC nên $H \ 1 + t;-t;1 + 2t \ , \quad t \in \mathbb{R} \ .$

Ta có: $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$ với $\begin{cases} \overrightarrow{AH} = \ -2 + t;-2 - t;3 + 2t \\ \overrightarrow{BC} = \ 1;-1;2 \end{cases} \Rightarrow t = -1 \Rightarrow H \ 0;1;-1 \ .$

<u>Câu VI</u>

1) Phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x = -4 \quad L \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., \quad k \in \mathbb{Z} \ .$

2) Các bộ số gồm 3 chữ số khác nhau có tổng bằng 10 là:

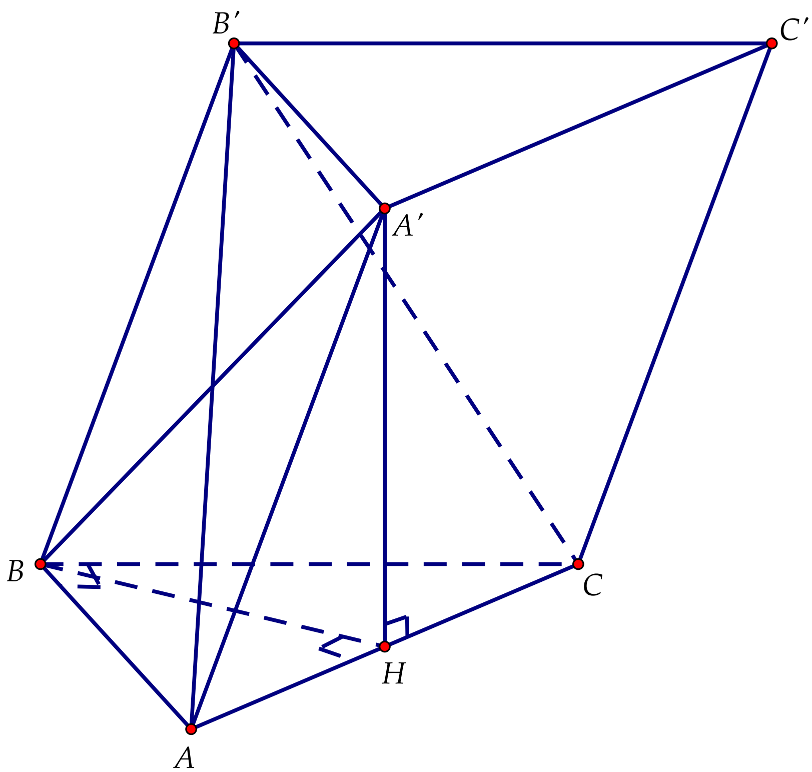
   $\ 0;1;9 \ , \quad 0;2;8 \ , \quad 0;3;7 \ , \quad 0;4;6 \ , \quad 1;2;7 \ , \quad 1;3;6 \ , \quad 1;4;5 \ , \quad 2;3;5 \ \cdot$

   Bấm ngẫu nhiên 3 phím tăng dần có không gian mẫu là $n \ \Omega \ = 3!.C_{10}^3 = 720.$

   Gọi A là biến cố để bấm đúng mật khẩu. Khi đó số phần tử của A là 8.

   Vì vậy xác suất cần tìm là $P \ A \ = \dfrac{n \ A}{n \ \Omega} = \dfrac{1}{90} \cdot$

Câu VII



Gọi H là trung điểm của BC. Khi đó $A'H$ là đường cao của hình lăng trụ.

Ta có ΔABC vuông cân tại B, suy ra: $AC = 2a \Rightarrow BH = A'H = a$, (vì góc tạo bởi đường thẳng $A'B$ với mặt phẳng ABC là góc $A'BH = 45^o$).

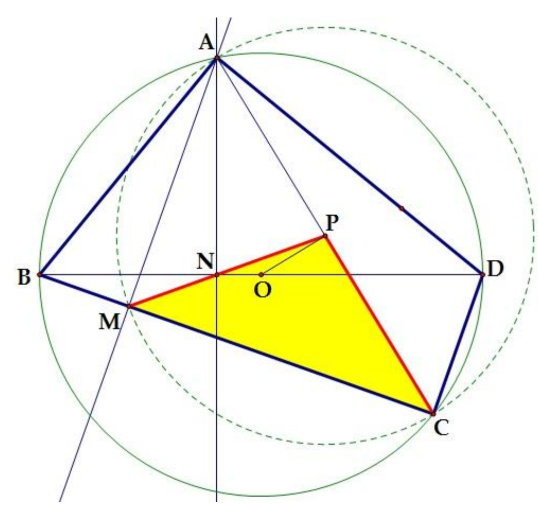
Suy ra $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot A'H = \dfrac{1}{2}2a^2.a = a^3$ (*đvtt*)

Ta có: $ABB'A'$ là hình bình hành, $AB = AA' = a\sqrt{2} \Rightarrow ABB'A'$ là hình thoi $\Rightarrow A'B \perp AB'$.

Mà $AC \perp BH,\ AC \perp A'H \Rightarrow AB' \perp AC$.

Suy ra : $A'B \perp\ AB'C\ \Rightarrow A'B \perp B'C$.

Câu VIII



Ta có MN qua $M\ 0;4$ nhận $\overrightarrow{MN} =\ 2;-2$ làm vtcp nên có phương trình: $MN: x + y - 4 = 0$.

Do $P = MN \cap AC \Rightarrow \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow P\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

Ta có tứ giác $ABCD$ nội tiếp

Suy ra: $PCM = ADB = BAN$. Đồng thời tứ giác $ABMN$ nội tiếp (do $BNA = BMA = 90^0$)

Suy ra $BAN = PMC$ (góc ngoài bằng góc đối trong)

Do đó ta suy ra $PCM = PMC \Rightarrow \Delta MPC$ cân tại $P \Rightarrow MP = PC \quad *$ và đồng thời P là trung điểm AC.

Gọi $C \in AC \Rightarrow C\ \ c;c-1\ \ \Rightarrow \overrightarrow{PC} = \left(c-\frac{5}{2};c-\frac{5}{2}\right)$ và $\overrightarrow{PM} = \left(-\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$

Vậy $\ * \ \Leftrightarrow 2\left(c-\frac{5}{2}\right)^2 = 2\frac{25}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} c=0 \Rightarrow C\ \ 0;-1\ \ \Rightarrow A\ \ 5;4 & ktm \\ c=5 \Rightarrow C\ \ 5;4\ \ \Rightarrow A\ \ 0;-1 & tm \end{array}\right. \quad do\ x_A<2$.

Ta có phương trình đường $BC \xrightarrow[vtcp:\overrightarrow{MC}=\ 5;0]{qua\,C\ \ 5;4} BC: y-4=0$

Và phương trình đường $BD \xrightarrow[vtpt:\overrightarrow{AN}=\ 2;3]{qua\,N\ \ 2;2} 2x+3y-10=0$

Do đó $B = BC \cap BD \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y-10=0 \\ y-4=0 \end{cases} \Rightarrow B\ \ -1;4$.

<u>Câu IX</u>.

Điều kiện xác định: $0 < x \le 2$. Đặt: $\begin{cases} a=\log_3\ \ \sqrt{2+x}+\sqrt{2-x} \\ b=\log_3 x \end{cases}$.

Phương trình $\Leftrightarrow 3a^2+2(2+2b)^2.a+\ \ 1+b\ \ ^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{1+b}{3} \\ a=1+b \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} 3\log_3\ \ \sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\ \ =1+\log_3 x & 2 \\ \log_3\ \ \sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\ \ =1+\log_3 x & 3 \end{array}\right.$$

$$3\ \ \Leftrightarrow \sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}=3x \Leftrightarrow 4+2\sqrt{4-x^2}=9x^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{4-x^2}=9x^2-4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} \le x \le 2 \\ 4\ \ 4-x^2\ \ =81x^4-72x^2+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} \le x \le 2 \\ 81x^4-68x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{17}}{9}.$$

$$2\ \ \Leftrightarrow\ \ \sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\ \ ^3=3x \qquad 4$$

Ta có: $2 \le z = \sqrt{2+x}+\sqrt{2-z} \le 2\sqrt{2} \Rightarrow z^3 \in \left[8;16\sqrt{2}\right]$.

Mà: $3x \le 6 \Rightarrow \log_3 3x \le \log_3 6 < 8$. Suy ra phương trình $\ 4\ $ vô nghiệm.

Kết luận: So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=\frac{2\sqrt{17}}{9}$.

Câu X.

1. Điều kiện xác định: $x \geq 2,\ y \geq -3.$

Áp dụng bất đẳng thức $a + b \leq \sqrt{2\left(a^2 + b^2\right)}$ với mọi $a,\ b.$ Ta có:

$$x + y + 1 = 2\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3}\right) \leq 2\sqrt{2\left(x - 2 + y + 3\right)} = 2\sqrt{2\left(x + y + 1\right)}.$$

Từ đây ta có: $x + y + 1 \leq 2\sqrt{2\left(x + y + 1\right)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = -1 \\ x + y \leq 7 \end{array}\right.$.

Do đó giá trị lớn nhất của $x + y$ là $7,$ đạt được khi và chỉ khi $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - 2 = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}.$

Vậy giá trị lớn nhất của $x + y$ là $7,$ đạt được tại $x = 6,\ y = 1.$

2. Mặt khác: $\left(x + y + 1\right)^2 = 4\left(x + y + 1 + 2\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{y+3}\right) \geq 4\left(x + y + 1\right).$

Từ đó ta có: $\left[\begin{array}{l} x + y \leq -1 \\ x + y \geq 3 \end{array}\right.$. Do $x + y \geq -1$ nên $\left[\begin{array}{l} x + y = -1 \\ x + y \geq 3 \end{array}\right.$.

Với $x + y = -1,$ ta có: $x = 2,\ y = -3.$ Khi đó $P = -\dfrac{9746}{243}.$

Xét $x + y \in \left[3;7\right],$ và $x \geq 2,$ ta có:

$x^2 + y^2 + 5 = x^2 + 4 + y^2 + 1 \geq 4x + 2y = 2x + 2\left(x + y\right) \geq 4 + 6 = 10$

Suy ra: $x^2 + y^2 \geq 5.$

Khi đó: $P = 3^{x+y-4} + \left(x + y + 1\right)\cdot 2^{7-x-y} - 3\left(x^2 + y^2\right) \leq 3^{x+y-4} + \left(x + y + 1\right)\cdot 7^{-x-y} - 15.$

Đặt $t = x + y,$ ta có: $P \leq f(t) = 3^{t-4} + \left(t + 1\right)\cdot 2^{7-t} - 15$ với $t \in \left[3;7\right].$

Ta có: $f'(t) = 3^{t-4}\cdot\ln 3 + 2^{7-t} - \left(t + 1\right)\cdot 2^{7-t}.\ln 2.$

$$\begin{aligned} f''(t) &= 3^{t-4}\left(\ln 3\right)^2 - 2^{7-t}\ln 2 - 2^{7-t}\ln 2 + \left(t + 1\right)\cdot 2^{7-t}\left(\ln 2\right)^2 \\ &= 3^{t-4}\left(\ln 3\right)^2 + \left[\left(t + 1\right)\left(\ln 2\right)^2 - 2\ln 2\right]2^{7-t} > 0, \forall t \geq 3. \end{aligned}$$

Suy ra: $f'(t)$ đồng biến trên $\left[3;7\right].$ Ta có: $f'\left(3\right) < 0,\ f'(7) > 0.$

Suy ra tồn tại $a \in [3;7]$ để $f'(a) = 0.$ Suy ra: $f'(t)$ nghịch biến trên $(3;a)$ và đồng biến trên $(a;7)$.

Ta có: $f(3) = \dfrac{148}{3}, f(7) = 20.$ Suy ra: $f(t) \le f(3) = \dfrac{148}{3}\cdot$

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi x, y khi và chỉ khi: $m \ge \dfrac{148}{3}\cdot$

<u>Người Giải</u>: ***Huỳnh Công Thái – Trương Huy Hoàng – Lê Văn Đoàn***

– Nguyễn Tuấn Lâm – Trần Anh Hào

(Trung Tâm Olympic Toán TINH HOA EDUCATION)