ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2013
Môn : TOÁN - Khối : A và A1

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu 1 (2,0 điểm) Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$ (1) , với m là tham số thực

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m = 0

b) Tìm m để hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Câu 2 (1,0 điểm) Giải phương trình $1 + \tan x = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Câu 3 (1,0 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - \sqrt{y^4+2} = y \\ x^2 + 2x(y-1) + y^2 - 6y + 1 = 0 \end{cases}$ (x, y $\in$ R).

Câu 4 (1,0 điểm) Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2}\ln x\ dx$

Câu 5 (1,0 điểm) Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A, $ABC = 30^0$, SBC là tam giác đều cạnh a và mặt bên SBC vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).

Câu 6 (1,0 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $(a+c)(b+c) = 4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{32a^3}{(b+3c)^3} + \frac{32b^3}{(a+3c)^3} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$

PHẦN RIÊNG (3,0 điểm): ***Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc phần B)***

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7.a (1,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm C thuộc đường thẳng $d: 2x + y + 5 = 0$ và $A(-4;8)$. Gọi M là điểm đối xứng của B qua C, N là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng MD. Tìm tọa độ các điểm B và C, biết rằng N(5;-4).

Câu 8.a (1,0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-6}{-3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$ và điểm A(1;7;3). Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với Δ. Tìm tọa độ điểm M thuộc Δ sao cho AM = $2\sqrt{30}$.

Câu 9.a (1,0 điểm). Gọi S là tập hợp tất cả số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Xác định số phần tử của S. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn là số chẵn.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7.b (1,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x - y = 0$. Đường tròn (C) có bán kính $R = \sqrt{10}$ cắt Δ tại hai điểm A và B sao cho AB = $4\sqrt{2}$. Tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại một điểm thuộc tia Oy. Viết phương trình đường tròn (C).

Câu 8.b (1,0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 11 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 8 = 0$. Chứng minh (P) tiếp xúc với (S). Tìm tọa độ tiếp điểm của (P) và (S).

Câu 9.b (1,0 điểm) Cho số phức $z = 1 + \sqrt{3}i$. Viết dạng lượng giác của z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w = (1+i)z^5$.

BÀI GIẢI

Câu 1:

a) m= 0, hàm số thành : y = $-x^3 + 3x^2 - 1$. Tập xác định là R.

$y' = -3x^2 + 6x$; y' = 0 ⇔ x = 0 hay x = 2; y(0) = -1; y(2) = 3

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$

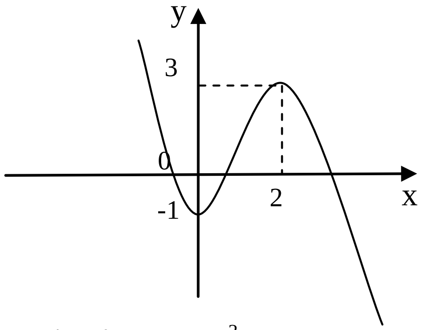
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	+	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$; $(2; +\infty)$; hàm số đồng biến trên (0; 2)

Hàm số đạt cực tiểu tại x = 0; y(0) =-1; hàm số đạt cực đại tại x = 2; y(2) = 3

y'' = -6x + 6; y" = 0 ⇔ x = 1. Điểm uốn I (1; 1)

Đồ thị :



b. $y' = -3x^2 + 6x + 3m$, y' = 0 ⇔ m= $x^2 - 2x = g(x)$

do đó yêu cầu bài toán ⇔ $y' \le 0, \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \le x^2 - 2x \quad \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \le \min\limits_{x>0}\left(x^2 - 2x\right), \forall x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \le -1 = g(1)$

Câu 2 : 1+tanx=2(sinx+cosx)

⇔ cosx+sinx = 2(sinx+cosx)cosx (hiển nhiên cosx=0 không là nghiệm)

⇔ sinx+cosx=0 hay cosx = $\frac{1}{2}$ ⇔ tanx=-1 hay cosx = $\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ hay } x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 3 : Đk $x \ge 1$

$x^2 + 2(y-1)x + y^2 - 6y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+y-1)^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow 4y = (x+y-1)^2 \; (*)$

Vậy: $y \ge 0$

$\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - \sqrt{y^4+2} = y \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x-1} = \sqrt{(y^4+1)+1} + \sqrt[4]{(y^4+1)-1} \; (**)$

Đặt f(t) = $\sqrt{t+1} + \sqrt[4]{t-1}$ thì f đồng biến trên $[1, +\infty)$

Nên (**) ⇔ f(x) = f(y^4 + 1) ⇔ x = $y^4 + 1$

Thế vào (*) ta có : $4y = (y^4 + y)^2 = y^8 + 2y^5 + y^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \rightarrow x = 1 \\ y^7 + 2y^4 + y = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \end{array}\right.$ (vì g(y) = $y^7 + 2y^4 + y$ đồng biến trên $[0, +\infty)$)

Vậy (x; y) = (1; 0) hay (x; y) = (2; 1).

Cách khác : $x^2 + 2(y-1)x + y^2 - 6y + 1 = 0 \Rightarrow x = -y + 1 \pm 2\sqrt{y}$ vì $x \ge 1$

$\Rightarrow x = -y + 1 + 2\sqrt{y}$

Đặt u = x – 1 ≥ 0 và v = y^4 ≥ 0, ta được $\sqrt{u+2}+\sqrt[4]{u}=\sqrt{v+2}+\sqrt[4]{v}$

Xét hàm số f(t) = $\sqrt{t+2}+\sqrt[4]{t}$ tăng trên [0; +∞) ⇒ f(u) = f(v) ⇒ u = v ⇒ x – 1 = y^4

Câu 4 : $I=\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2}\ln x dx$

Đặt t=lnx $\Rightarrow \frac{dx}{x}=dt, x=e^t, t(1)=0, t(2)=\ln 2 \ \Rightarrow I=\int_0^{\ln 2} t\left(e^t-e^{-t}\right)dt$

Đặt u=t $\Rightarrow du=dt, dv=e^t-e^{-t}$, chọn $v=e^t+e^{-t}$

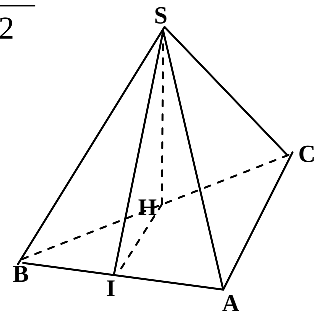
$\Rightarrow$ I = $\left[t(e^t+e^{-t})\right]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2}(e^t+e^{-t})dt$ = $\frac{5\ln 2-3}{2}$

<u>Cách khác</u> : Đặt $u=\ln x \ \Rightarrow du=\frac{dx}{x}$

$dv=\frac{x^2-1}{x^2}dx=(1-\frac{1}{x^2})dx \Rightarrow v=x+\frac{1}{x} \Rightarrow I=\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x\Big|_1^2-\int_1^2(x+\frac{1}{x})\frac{dx}{x}$

$=\frac{5}{2}\ln 2-\int_1^2(1+\frac{1}{x^2})dx=\frac{5}{2}\ln 2-(x-\frac{1}{x})\Big|_1^2=\frac{5}{2}\ln 2-(2-\frac{1}{2})=\frac{5}{2}\ln 2-\frac{3}{2}$

Câu 5. Gọi H là trung điểm BC thì SH ⊥ (ABC) và SH = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$



Ta có tam giác ABC là nửa tam giác đều nên

BC=a, $AC=\frac{a}{2}, AB=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$V=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\frac{a}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right]\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3}{16}$, Gọi I là trung điểm AB

HI=a/4, $SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vẽ HK ⊥ SI thì HK ⊥ (SAB), ta có $\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{\left[\frac{a}{4}\right]^2}+\frac{1}{\left[\frac{a\sqrt{3}}{2}\right]^2} \Rightarrow HK=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{52}}$

Vậy d(C, SAB)= 2HK = $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{52}}=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$

Câu 6. Gỉa thiết ⇔ $\left(\frac{a}{c}+1\right)\left(\frac{b}{c}+1\right)=4$

Đặt x = $\frac{a}{c}$; y = $\frac{b}{c}$ thì (x + 1)(y + 1) = 4 ⇔ S + P = 3 P = 3 – S

P = $32\left[\left(\frac{x}{y+3}\right)^3+\left(\frac{y}{x+3}\right)^3\right]-\sqrt{x^2+y^2}$

$\geq 8\left(\frac{x}{y+3}+\frac{y}{x+3}\right)^3-\sqrt{x^2+y^2}$ $=8\left[\frac{S^2+3S-2P}{3S+P+9}\right]^3-\frac{S}{\sqrt{2}}$

$=8\left[\frac{S^2+3S-2(3-S)}{3S+(3-S)+9}\right]^3-\frac{S}{\sqrt{2}}$

$$= 8\left(\frac{S^2+5S-6}{2S+12}\right)^3 - \frac{S}{\sqrt{2}} = 8\left(\frac{S-1}{2}\right)^3 - \frac{S}{\sqrt{2}} = (S-1)^3 - \frac{S}{\sqrt{2}}, S \ge 2$$

P' = 3 (S – 1)^2 – $\frac{1}{\sqrt{2}}$ > 0, ∀S ≥ 2 ⇒ P min = P (2) = 1 – $\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra chẳng hạn khi x = y = 1.

Câu 7a. C(t;-2t-5)

Gọi I là trung điểm của AC, suy ra $I\left(\frac{-4+t}{2};\frac{-2t+3}{2}\right)$

Ta có: IC^2 = IA^2, suy ra t =1

Tọa độ C(1;-7)

B là điểm đối xứng của N qua AC. Dễ dàng tìm được B(-4;-7)

Câu 8a. Ptmp (P) ⊥ Δ có 1 pháp vectơ là (-3; -2; 1).

Vậy ptmp (P) là : -3(x – 1) – 2(y – 7) + z – 3 = 0 ⇔ 3x + 2y – z – 14 = 0

M thuộc Δ ⇔ M (6 -3t; -1 – 2t; -2 + t)

YCBT ⇔ (5 – 3t)^2 + (-8 – 2t)^2 + (-5 + t)^2 = 120

⇔ 14t^2 – 8t – 6 = 0 ⇔ t = 1 hay t = $-\frac{3}{7}$

Vậy tọa độ điểm M là (3; -3; -1) hay ($\frac{51}{7}$; $-\frac{1}{7}$; $-\frac{17}{7}$).

Câu 9a. Số cách gọi số tự nhiên gồm 3 chữ số phân biệt là số chẵn: 3.6.5=90

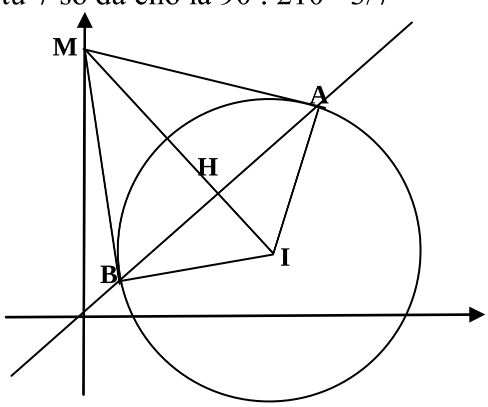
Số phần tử S là 90.

Số cách gọi số tự nhiên gồm 3 chữ số phân biệt là: 5.6.7=210

Xác suất để chọn 3 số tự nhiên phân biệt là số chẵn từ 7 số đã cho là 90 : 210 =3/7

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7b.



Cos(AIH) = $\frac{IH}{IA} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ⇒ IH = $\sqrt{2}$

Vậy MH = MI – IH = 4$\sqrt{2}$; với M ∈ Oy (0; y)

MI ⊥ AB ⇒ MI : x + y + c = 0 ; M (0;-c)

MH = d (M; Δ) = $\frac{|c|}{\sqrt{2}}$ = 4$\sqrt{2}$ ⇒ c = 8 hay c =-8

I (t; -t – 8) hay (t; -t + 8)

d (I; Δ) = $\frac{|t+t+8|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = IH$ ⇔ t = -3 hay t = -5

+ Với t = -3 ⇒ I (-3; -5); t = -5 ⇒ I (-5; -3)

⇒ Pt 2 đường tròn cần tìm là : (x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 10 hay (x + 5)^2 + (y + 3)^2 = 10.

Câu 8b. (S) có tâm là I (1; -2; 1) và R^2 = 14.

Khoảng cách từ tâm I đến mp (P) là : $\frac{|2(1)+3(-2)+1-11|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$ = R

Vậy (P) tiếp xúc với (S).

Pt (d) qua I và ⊥ Δ : $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{1}$, T ∈ (d) ⇒ T (1 + 2t; 3t – 2; 1 + t)

T ∈ (P) ⇒ t = 1. Vậy T (3; 1 ; 2).

Câu 9b. r = $\sqrt{1+3}$ = 2; tgφ = $\sqrt{3}$, chọn φ = $\frac{\pi}{3}$

⇒ dạng lượng giác của z là z = $2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$\Rightarrow z^5 = 32(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = 32(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\Rightarrow w = 32(1 + i)\ (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 32(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) + 32i(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})$

Vậy phần thực của w là : $32(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})$ và phần ảo là $32(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Trần Minh Quang, Trần Minh Thịnh
(Trung tâm LTĐH Vĩnh Viễn – TP.HCM)