

Bài I (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{7}{\sqrt{x}+8}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$

3) Tìm x để biểu thức $P = A.B$ có giá trị là số nguyên.

Bài II (2,0 điểm) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 720 m^2 . Nếu tăng chiều dài thêm 10m và giảm chiều rộng 6m thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

Bài III (2,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{3x}{x-1} - \frac{2}{y+2} = 4 \\ \frac{2x}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 5 \end{cases}$$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): $y = 3x + m^2 - 1$ và parabol (P): $y = x^2$

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

b) Gọi x_1 và x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P). Tìm m để $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 1$

Bài IV (3,5 điểm) Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (O) (B là tiếp điểm) và đường kính BC. Trên đoạn thẳng CO lấy điểm I (I khác C, I khác O). Đường thẳng AI cắt (O) tại hai điểm D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng DE.

1) Chứng minh bốn điểm A, B, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{BE}$.

3) Đường thẳng d đi qua điểm E song song với AO, d cắt BC tại điểm A. Chứng minh $HK // DC$.

4) Tia CD cắt AO tại điểm P, tia EO cắt BP tại điểm F. Chứng minh tứ giác BECF là hình chữ nhật.

Bài V (0,5 điểm) Với các số thực x, y thỏa mãn $x - \sqrt{x+6} = \sqrt{y+6} - y$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y$.

-----HẾT-----

BÀI GIẢI

Bài I: (2,0 điểm)

$$1) \text{ Với } x = 25 \text{ ta có } A = \frac{7}{\sqrt{25}+8} = \frac{7}{13}$$

$$2) B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9} \\ = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) + 2\sqrt{x}-24}{x-9} = \frac{x+5\sqrt{x}-24}{x-9} = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+8)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{(\sqrt{x}+8)}{(\sqrt{x}+3)} \text{ với } x \geq 0, x \neq 9$$

$$3) P = A.B = \frac{7}{\sqrt{x}+8} \cdot \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3} = \frac{7}{\sqrt{x}+3}$$

$$\text{Ta có } 0 < P \leq \frac{7}{3}$$

P là số nguyên $\Leftrightarrow P = 1$ hay $P = 2$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ hay } x = 16$$

Bài II: (2,0 điểm)

Gọi x là chiều dài, y là chiều rộng ta có:

$$\begin{cases} x.y = 720 \\ (x+10)(y-6) = 720 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 720 \\ xy + 10y - 6x - 60 = 720 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 720 \\ 10y - 6x - 60 = 0 \\ x = \frac{5y}{3} - 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5y}{3} - 10 \\ y(\frac{5y}{3} - 10) = 720 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5y}{3} - 10 \\ y^2 - 6y - 3.(144) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 24 (\text{do } y > 0) \\ x = 30 \end{cases}$$

Vậy chiều dài là 30m và chiều rộng là 24m.

Bài III: (2,0 điểm)

$$1) \begin{cases} \frac{3x}{x-1} - \frac{2}{y+2} = 4 \\ \frac{2x}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 5 \end{cases}$$

Đặt $u = \frac{x}{x-1}$, $v = \frac{1}{y+2}$. Hệ thành

$$\begin{cases} 3u - 2v = 4 \\ 2u + v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7u = 14 \\ v = 5 - 2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x-1} = 2 \\ \frac{1}{y+2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

2)

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$$x^2 = 3x + m^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x - m^2 + 1 = 0.$$

Phương trình này có $\Delta = 9 + 4(m^2 - 1) > 0$ với mọi m. Do đó phương trình hoành độ giao điểm luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m. Suy ra (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

$$b) (x_1 + 1)(x_2 + 1) = 1 \Leftrightarrow x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow -m^2 + 1 + 3 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

Bài IV (3,5 điểm)

1) Tứ giác ABOH có 2 góc đối vuông nên nội tiếp trong đường tròn đường kính AO.

2) Xét 2 tam giác ADB và ABE.

Ta có $\angle ABD = \angle BED$ (cùng chắn cung BD và góc A chung)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{DB}{BE}$$

3) Tứ giác ABOH nội tiếp nên ta có:

$$\angle OAH = \angle OBH$$

Ta có $\angle HAO = \angle HEK$ (Vì $EK \parallel AO$)

$$\Rightarrow \angle HBK = \angle HEK.$$

Vậy tứ giác HKEB nội tiếp $\Rightarrow \angle HKB = \angle DEB = \angle DCB$ (cùng chắn DB)

Nên $HK \parallel DC$ do 2 góc đồng vị bằng nhau.

4) Kẻ thêm AQ là tiếp tuyến thứ 2 với vòng tròn O.

Ta có tứ giác APDQ nội tiếp vì $\angle QDC = \angle OAB = \angle PAB = \angle QBC$

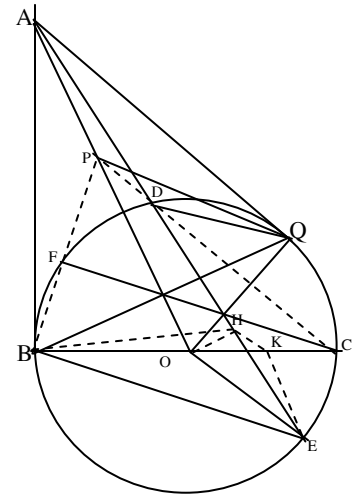
Do tứ giác APDQ nội tiếp nên ta có $\angle AQP = \angle ADP = \angle EDC = \angle EBC$

Vì đối xứng nên ta có $\angle ABP = \angle AQP$

$$\Rightarrow \angle ABP = \angle CBE.$$

$$\Rightarrow BF \perp BE.$$

Vậy tứ giác BFCE là hình chữ nhật.



Bài V: (0,5 điểm)

$$x - \sqrt{x+6} = \sqrt{y+6} - y \Leftrightarrow x + y = \sqrt{x+6} + \sqrt{y+6}$$

Điều kiện $x \geq -6, y \geq -6$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x+6} \geq 0 \text{ và } v = \sqrt{y+6} \geq 0$$

$$\Rightarrow x = u^2 - 6, y = v^2 - 6$$

$$\Rightarrow x + y = u^2 + v^2 - 12 = u + v$$

$$\Rightarrow (u+v)^2 - (u+v) - 12 = 2u.v$$

$$\text{Ta có } 2u.v \leq \frac{1}{2}(u+v)^2 \Rightarrow (u+v)^2 - (u+v) - 12 \leq \frac{1}{2}(u+v)^2$$

$$\text{Đặt } t = u+v \Rightarrow t^2 - 2t - 24 \leq 0 \Leftrightarrow (t+4)(t-6) \leq 0 \Rightarrow t \leq 6 \text{ (vì } t+4 \geq 4)$$

$$\text{Với } t = u+v \Rightarrow -4 \leq u+v = x+y = P \leq 6.$$

Khi $x = y = 3$ ta có $P = x + y = 6$. Vậy GTLN của P là 6.

$$\text{Ta có } (u+v)^2 - (u+v) - 12 = 2u.v \geq 0 \Rightarrow t^2 - t - 12 \geq 0 \Rightarrow (t+3)(t-4) \geq 0$$

$$\Rightarrow t \geq 4 \text{ (vì } t+3 \geq 3) \Rightarrow P = x + y \geq 4 \text{ và } P = 4 \text{ khi } x = -6, y = 10 \text{ (hay } x = 10, y = -6).$$

Vậy GTNN của P là 4.

TS. Nguyễn Phú Vinh
(Trung tâm luyện thi Vĩnh Viễn – TP.HCM)