ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2014

Môn: TOÁN; Khối B.

(Thời gian: 180 phút, không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (2 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx + 1 \quad (1)$, với m là tham số thực.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với $m = 1$.

b) Cho điểm $A(2;3)$. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có 2 điểm cực trị B, C và tam giác ABC cân ở A.

Câu 2. (1 điểm) Giải phương trình $\sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2 - \sin 2x$.

Câu 3. (1 điểm) Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + x} dx$.

Câu 4. (2 điểm).

a) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $2z + 3(1-i)\overline{z} = 1 - 9i$. Tính module của z.

b) Để kiểm tra chất lượng sản phẩm từ một công ty sữa, người ta đã gửi đến bộ phận kiểm nghiệm 5 hộp sữa cam, 4 hộp sữa dâu và 3 hộp sữa nho. Bộ phận kiểm nghiệm chọn ngẫu nhiên 3 hộp sữa để phân tích mẫu. Tính xác suất để 3 hộp sữa được chọn có cả 3 loại.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;-1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng qua A và vuông góc với d. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên d.

Câu 6. (1 điểm) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AB, góc tạo bởi đường thẳng $A'C$ với mặt đáy bằng $60°$. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ điểm B đến $(ACC'A')$.

Câu 7. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$. Điểm $M(-3;0)$ là trung điểm của cạnh AB, điểm $H(0;-1)$ là hình chiếu vuông góc của B trên AD và điểm $G\left(\frac{4}{3};3\right)$ là trọng tâm của tam giác BCD. Tìm tọa độ các điểm B, D.

Câu 8. (1 điểm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (1-y)\sqrt{x-y} + x = 2 + (x-y-1)\sqrt{y} \\ 2y^2 - 3x + 6y + 1 = 2\sqrt{x-2y} - \sqrt{4x-5y-3} \end{cases} \quad \text{với } x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 9. (1 điểm) Cho a, b, c không âm và thỏa mãn $(a+b)c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \frac{c}{2(a+b)}.$$

--- Hết ---

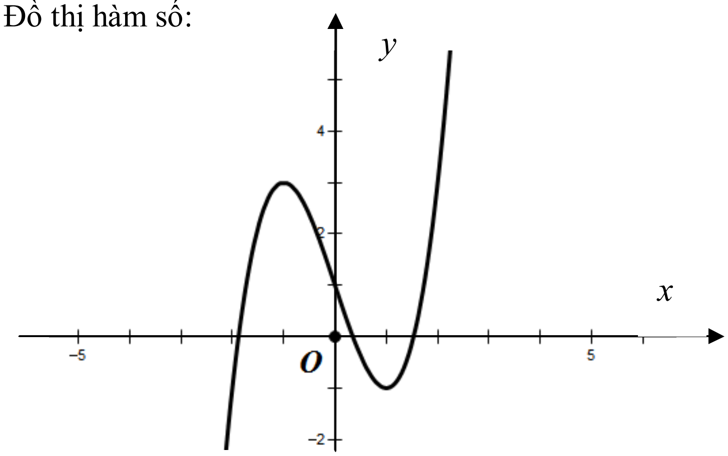
LỜI GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2014

Câu 1. a/ Với $m=1$, ta có hàm số $y=x^3-3x+1$. Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Chiều biến thiên: $y'=3x^2-3, y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=-1 \\ x=-1 \Rightarrow y=3 \end{array}\right.$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1),(1;+\infty)$, hàm số nghịch biến trên $(-1;1)$.

Đồ thị hàm số:



Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗	3	↘		↗	$+\infty$
	$-\infty$				-1		

b/ Ta có $y'=3x^2-3m, y'=0 \Leftrightarrow x^2=m$. Đồ thị hàm số đã cho có 2 cực trị khi $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt và $x \neq 2$ hay $m>0, m \neq 4$.

Gọi $B\left(-\sqrt{m};2m\sqrt{m}+1\right), C\left(\sqrt{m};-2m\sqrt{m}+1\right)$ là 2 cực trị của hàm số. Tam giác ABC cân ở A khi $AB=AC$ hay $\left(-\sqrt{m}-2\right)^2+\left(2m\sqrt{m}-2\right)^2=\left(\sqrt{m}-2\right)^2+\left(-2m\sqrt{m}-2\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{m}-2m\sqrt{m}=0.$

Phương trình cuối có nghiệm dương duy nhất là $m=\dfrac{1}{2}$.

Vậy giá trị cần tìm là $m=\dfrac{1}{2}$.

Câu 2. Xét phương trình: $\sqrt{2}\left(\sin x-2\cos x\right)=2-\sin 2x \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x-2\sqrt{2}\cos x=2-\sin 2x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x-2\sqrt{2}\cos x-2+2\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x\left(1+\sqrt{2}\cos x\right)-2\left(1+\sqrt{2}\cos x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\sqrt{2}\cos x\right)\left(\sqrt{2}\sin x-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin x=\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Ta loại nghiệm $\sin x=\sqrt{2}$ vì $\left|\sin x\right| \leq 1$, do đó ta có $\cos x=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=\pm\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 3. Xét tích phân: $\int\limits_1^2 \frac{x^2+3x+1}{x^2+x}dx$.

Ta có: $\int\limits_1^2 \frac{x^2+3x+1}{x^2+x}dx = \int\limits_1^2 \left(1+\frac{2x+1}{x^2+x}\right)dx = x\Big|_1^2 + \int\limits_1^2 \frac{d(2x+1)}{x^2+x} = x\Big|_1^2 + \ln\left|x^2+x\right|\Big|_1^2 = 1+\ln 3$.

Câu 4.

a) Đặt $z = x+yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có:

$$2z+3(1-i)\bar{z} = 1-9i \Leftrightarrow 2x+2yi+3(1-i)(x-yi) = 1-9i$$
$$\Leftrightarrow 2x+2yi+3x-3yi-3xi-3y = 1-9i \Leftrightarrow (5x-3y)+(-3x-y)i = 1-9i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-3y=1 \\ -3x-y=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

Vậy module cần tính là $|z| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$.

b) Không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{12}^3$.

Gọi A là biến cố chọn được có đủ 3 loại. Số phần tử của biến cố A là $C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1$

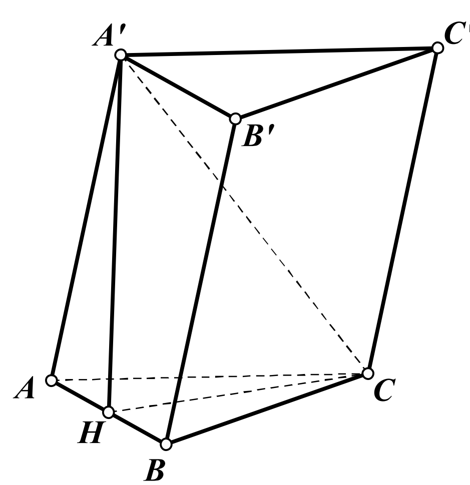
Xác xuất của biến cố A là: $\frac{C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1}{C_{12}^3} = \frac{3}{11}$.

Câu 5. Mặt phẳng qua (P) qua A, có vtpt là $\overrightarrow{n_p} = \overrightarrow{a_d} = (2;2;-1)$. Suy ra $(P): 2x+2y-z+3=0$.

Gọi H là hình chiếu của A lên $(d) \Rightarrow \{H\} = (d) \cap (P)$.

Toạ độ điểm H thỏa hệ phương trình $\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1} \\ 2x+2y-z+3=0 \end{cases}$ hay $H\left(\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Câu 6.



Gọi H là trung điểm AB thì $A'H \perp (ABC), CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{ABC}$

Mặt khác, ta có ABC là tam giác đều cạnh a nên $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Ta có

$\Delta A'HC$ vuông tại H và $\widehat{A'CH} = \left(\widehat{A'C, (ABC)}\right) = 60°$.

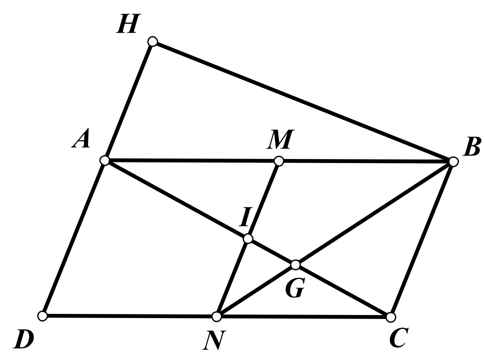
$$\Rightarrow A'H = CH \cdot \tan A'CH = \frac{3a}{2} \cdot \text{ Do đó } V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8} \cdot$$

Tiếp theo, ta sẽ tính khoảng cách từ B đến $(ACC'A')$. Ta có

$$V_{B.ACC'A'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{B.ACC'A'} = \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy $d_{[B,(ACC'A')]} = \dfrac{3V_{ACC'A'}}{S_{ACC'A'}} = \dfrac{3a\sqrt{13}}{13} \cdot$

Câu 7.



Gọi $B(a;b)$ và N là trung điểm CD.

Ta có $\overrightarrow{BG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BN}$ với $\overrightarrow{BG} = \left(\dfrac{4}{3} - a; 3 - b\right)$ và

$\overrightarrow{BN} = \left(x_N - a; y_N - b\right)$.

Do đó, ta được $N\left(\dfrac{4-a}{2}; \dfrac{9-b}{2}\right)$. Ta có

$$\begin{cases} MB = HM \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BH} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+3)^2 + b^2 = 10 \\ \dfrac{10-a}{2} \cdot a + \dfrac{9-b}{2}(1+b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + 6a = 1 \\ a^2 + b^2 - 10a - 8b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a - 1 \\ a^2 + 2a = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này, ta được $(a;b) = (0;-1), (-2;3)$. Ta xét các trường hợp:

- Với $a = 0, b = -1$, ta có $B(0;-1)$, loại vì trùng với H.
- Với $a = -2, b = 3$, gọi I là tâm của hình bình hành thì $I\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$, ta được $D(2;0)$.

Vậy ta được $B(-2;3), D(2;0)$.

Câu 8. Xét hệ phương trình $\begin{cases} (1-y)\sqrt{x-y} + x = 2 + (x-y-1)\sqrt{y} & (1) \\ 2y^2 - 3x + 6y + 1 = 2\sqrt{x-2y} - \sqrt{4x-5y-3} & (2) \end{cases}$.

Điều kiện xác định: $y \ge 0, 4x \ge 5y + 3, x \ge 2y$. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow (1-y)\left(\sqrt{x-y} - 1\right) + (x-y) - 1 = (x-y-1)\sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)\left(1-\sqrt{y}\right) + (1-y)\left(\sqrt{x-y} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\sqrt{y}\right)\left[x-y-1+\left(\sqrt{y}+1\right)\left(\sqrt{x-y}-1\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x-y}-1\right)\left[\sqrt{x-y}+1+\sqrt{y}+1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\sqrt{y} = 0 \\ \sqrt{x-y} - 1 = 0 \end{array}\right., \sqrt{x-y} + 1 + \sqrt{y} + 1 > 0$$

Ta xét 2 trường hợp:

- Nếu $1-\sqrt{y}=0 \Leftrightarrow y=1$, từ (2) suy ra $-3x+9=0 \Leftrightarrow x=3$.

- Nếu $\sqrt{x-y}-1=0 \Leftrightarrow x=y+1$, từ (2) suy ra $2y^2+3y-2=\sqrt{1-y}$, phương trình tương đương với

$$16y^2+8y+1=16(1-y)+8\sqrt{1-y}+1 \Leftrightarrow (4y+1)^2=(4\sqrt{1-y}+1)^2$$
$$\Leftrightarrow 4y+1=4\sqrt{1-y}+1 \Leftrightarrow y=\sqrt{1-y} \Leftrightarrow y^2+y-1=0$$

Phương trình cuối có nghiệm không âm duy nhất là $y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, tương ứng, ta có $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm là $(x;y)=(3;1),\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Câu 9. Ta có $1+\dfrac{b}{c+a}\geq 2\sqrt{\dfrac{b}{c+a}} \Rightarrow \dfrac{a+b+c}{c+a}\geq 2\sqrt{\dfrac{b}{c+a}} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{b}{c+a}}\geq \dfrac{2b}{a+b+c}$.

Đẳng thức xảy ra khi $c+a=b>0$ hoặc $b=0$.

Tương tự, ta cũng có $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}}\geq \dfrac{2a}{a+b+c}$ (đẳng thức xảy ra khi $c+b=a>0$ hoặc $a=0$) nên ta có

$$P\geq \frac{2(a+b)}{a+b+c}+\frac{c}{2(a+b)}=\frac{2}{1+\frac{c}{a+b}}+\frac{c}{2(a+b)}.$$

Đặt $t=\dfrac{c}{a+b}\geq 0$ và xét hàm số $f(t)=\dfrac{2}{1+t}+\dfrac{t}{2}, t\geq 0$.

Ta có $f'(t)=-\dfrac{2}{(1+t)^2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{(t+3)(t-1)}{2(t+1)^2}$.

Do đó $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=1$. Khảo sát hàm số này trên $[0;+\infty)$, ta được $f(t)\geq f(1)=\dfrac{3}{2}$.

Vậy GTNN của biểu thức đã cho là $\dfrac{3}{2}$, đạt được khi $a=0, b=c>0$ hoặc $b=0, a=c>0$.

Huỳnh Công Thái, Nguyễn Tuấn Lâm, Trương Huy Hoàng, Lê Phúc Lữ, Lê Văn Đoàn,
Nguyễn Minh Tùng, Trần Anh Hào.
(Trung tâm luyện thi ĐH Ngoại Thương)