ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2014

Môn Toán; Khối A và khối A1.

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (2 điểm) Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}(C)$ (1).

a) Khảo sát biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).

b) Tìm các điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $y=-x$ bằng $\sqrt{2}$.

Câu 2. (1 điểm) Giải phương trình $\sin x+4\cos x=2+\sin 2x$.

Câu 3. (1 điểm) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x^2-x+3$ và đường thẳng $y=2x+1$.

Câu 4. (1 điểm).

a. Cho số phức z thỏa mãn $z+(2+i)z=3+5i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.

b. Từ một hộp chứa 16 thẻ được đánh số từ 1 đến 16, chọn ngẫu nhiên 4 thẻ. Tính xác suất để 4 thẻ được chọn đều được đánh số chẵn.

Câu 5. (1 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y-2z-1=0$ và đường thẳng $(d): \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+3}{3}$. Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P). Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P).

Câu 6. (1 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SD=\dfrac{3a}{2}$, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của cạnh AB. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).

Câu 7. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ với điểm M là trung điểm của đoạn AB và N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $AN=3NC$. Viết phương trình đường thẳng CD, biết rằng $M(1;2)$ và $N(2;-1)$.

Câu 8. (1 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)}=12 \\ x^3-8x-1=2\sqrt{y-2} \end{cases}$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Câu 9. (1 điểm) Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^2}{x^2+xy+x+1}+\frac{y+z}{x+y+z+1}-\frac{1+yz}{9}.$$

--- Hết ---

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

a/ Xét hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. Điều kiện xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

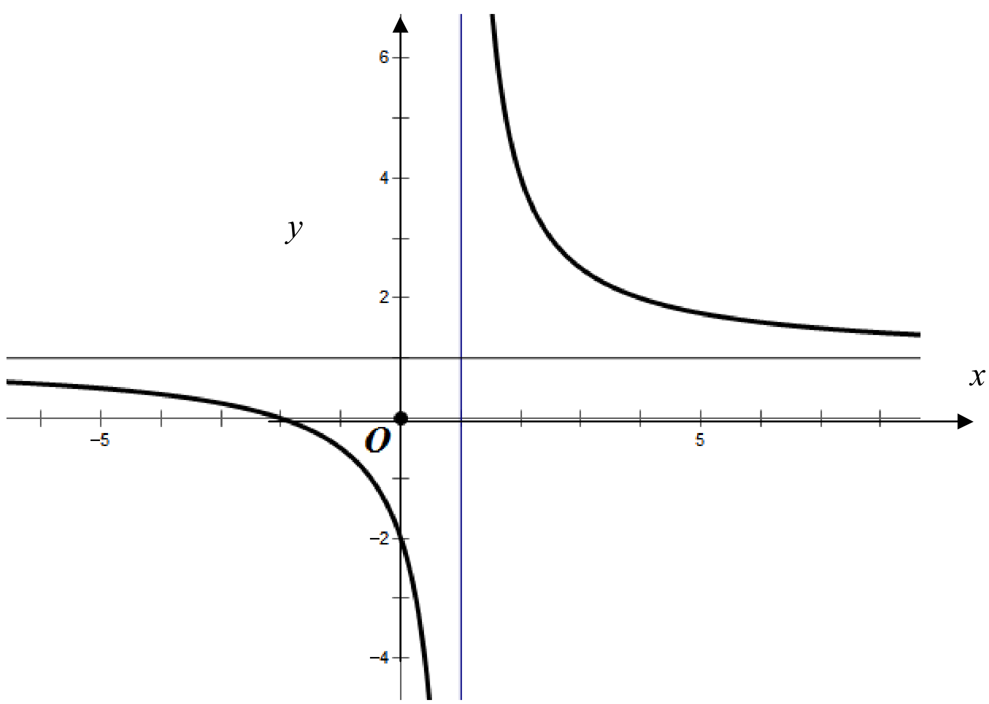
Ta có $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}<0$ với mọi $x\in D$.

Tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị hàm số



b/ Xét điểm $M\in(C)$ và $M\left(x_0;\dfrac{x_0+2}{x_0-1}\right)$ với $x_0\neq 1$.

Phương trình đường thẳng đã cho là (d): $y=-x\Leftrightarrow x+y=0$.

Khoảng cách từ M đến (d) là $\dfrac{\left|x_0+\dfrac{x_0+2}{x_0-1}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left|\dfrac{x_0^2+2}{x_0-1}\right|$.

Điều kiện đã cho trở thành $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left|\dfrac{x_0^2+2}{x_0-1}\right|=\sqrt{2}$, suy ra $x_0^2+2=2|x_0-1|$, do $x_0^2+2>0$ với mọi $x_0\neq 1$. Ta xét các trường hợp:

- Nếu $x_0-1\geq 0$, ta có $x_0^2+2=2(x_0-1)\Leftrightarrow x_0^2-2x_0+4=0$, vô nghiệm do $\Delta'=-3<0$.

- Nếu $x_0-1<0$, ta có $x_0^2+2=-2(x_0-1)\Leftrightarrow x_0^2+2x_0=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=-2\end{array}\right.$.

Cả 2 nghiệm này đều thỏa.

Vậy có 2 điểm M thỏa mãn đề bài là $M(0;-2), M(-2;0)$.

Câu 2. Xét phương trình lượng giác $\sin x+4\cos x=2+\sin 2x$.

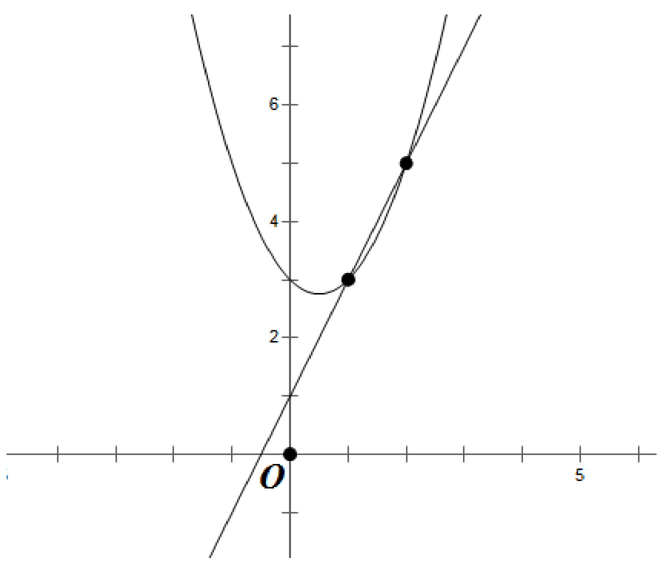
Ta biến đổi như sau

$$\begin{array}{l}\sin x+4\cos x=2+2\sin x\cos x\\ \Leftrightarrow \sin x(1-2\cos x)-2(1-2\cos x)=0\\ \Leftrightarrow (1-2\cos x)(\sin x-2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-2\cos x=0\\ \sin x-2=0\end{array}\right.\end{array}.$$

Phương trình thứ hai vô nghiệm do $|\sin x|\leq 1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Do đó, ta có $1-2\cos x=0\Leftrightarrow \cos x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$ với $k\in\mathbb{Z}$.

Câu 3. Phương trình hoành độ giao điểm $x^2-x+3=2x+1\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.



Diện tích hình phẳng cần tính là

$$S=\int_1^2\left|x^2-3x+2\right|dx=\int_1^2(3x-2-x^2)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-2x-\frac{x^2}{3}\right)\Bigg|_1^2=\frac{1}{6} \text{ (đơn vị diện tích).}$$

Vậy diện tích cần tìm là $S=\frac{1}{6}$.

Câu 4.

a/ Đặt $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned}&x+iy+(2+i)(x-iy)=3+5i\\ &\Leftrightarrow 3x+y+(-y+x)i=3+5i\\ &\Leftrightarrow 3x+y-3+(x-y-5)i=0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}3x+y-3=0\\ x-y-5=0\end{cases}\end{aligned}$$

Giải hệ này, ta được $x=2, y=-3$.

Do đó $z=2-3i$.

Vậy phần thực của số phức cần tìm là 2, phần ảo là -3.

b/ Số cách chọn 4 thẻ bất kỳ trong 16 thẻ là C_{16}^4 cách.

Số các số chẵn từ 1 đến 16 là 8, bao gồm $2,4,6,8,10,12,14,16.$

Chọn 4 số trong 8 số này, có C_8^4 cách.

Vậy xác suất cần tính là $\frac{C_8^4}{C_{16}^4}=\frac{70}{1820}=\frac{1}{26}$.

Câu 5. Gọi $A=(d)\cap(P)$. Tọa độ của A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}\frac{x-2}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+3}{3}\\ 2x+y-2z-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=4\\ 3x-z=4\\ 2x+y-2z-1=0\end{cases}.$$

Giải hệ này, ta được $x=\frac{7}{2}, y=-3, z=\frac{3}{2}$.

Do đó, tọa độ của A là $A\left(\frac{7}{2};-3;\frac{3}{2}\right)$.

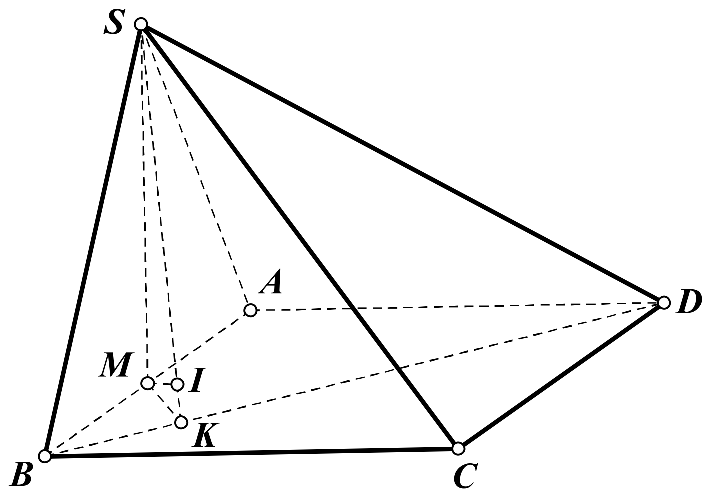
Gọi Q là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P). Khi đó, ta có

- (Q) qua $M\left(2;0;-3\right)\in(d)$.
- (Q) có phương trình pháp tuyến là $(1;-2;3)\times(2;1;-2)=(1;8;5)$.

Vậy phương trình của (Q) là $x+8y+5z+13=0$.

Câu 6.

a) Tính thể tích $S.ABCD$.



Gọi M là trung điểm AB, dễ thấy $SM \perp (ABCD)$.

Theo định lý Pythagore thì $MD^2 = MA^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4}$.

Lại có tam giác SMD vuông tại M, do $SM \perp (ABCD)$ nên suy ra

$$SM^2 = SD^2 - MD^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 - \frac{5a^2}{4} = a^2 \Rightarrow SM = a.$$

Do đó, ta được $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SM \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} a^3$ (đơn vị thể tích).

b) Tính khoảng cách từ A đến (SBD).

Ta có $V_{A.SBD} = V_{S,ABD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{6}$.

Kẻ $MK \perp BD$ với $K \in BD$, mà $BD \perp SM$ nên ta có $BD \perp (SMK)$, suy ra $BD \perp SK$.

Mặt khác, tam giác MBK vuông cân ở K, suy ra $MK = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ nên $SK = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Do đó, $S_{SBD} = \frac{1}{2} \cdot SK \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot a\sqrt{2} = \frac{3a^2}{4}$.

Vậy khoảng cách cần tìm là $d\left(A, (SBD)\right) = \frac{3V_{A.SBD}}{S_{SBD}} = \left(3 \cdot \frac{a^3}{6}\right) : \left(\frac{3a^2}{4}\right) = \frac{2a}{3}$.

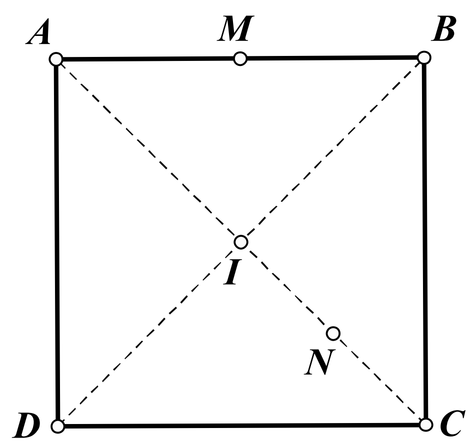
Câu 7. Gọi $I(a,b)$ là tâm của hình vuông đã cho thì N là trung điểm của IC.

Đặt $AM = x$, ta có $AN = \frac{3}{4}AC = \frac{3\sqrt{2}}{4}AB = \frac{3\sqrt{2}}{2}AM = \frac{3\sqrt{2}}{2}x$.

Tam giác AMN có $\widehat{MAN} = 45^\circ$ nên theo định lý cosin thì

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos 45^\circ = x^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}x}{2}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3\sqrt{2}x}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5x^2}{2}.$$

Ta cũng có $MN^2 = (2-1)^2 + (-1-2)^2 = 10$ nên $\frac{5x^2}{2} = 10 \Leftrightarrow x = 2$.



Theo giả thiết thì

$$\begin{cases} IM = 2 \\ IN = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (b-2)^2 = 4 \\ (a-2)^2 + (b+1)^2 = 4 \end{cases}.$$

Trừ từng vế của hai phương trình, ta được $a = 3b + 1$, thay vào phương trình đầu của hệ, ta có

$$(3b-1)^2 + (b+1)^2 = 2 \Leftrightarrow 2b(5b-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = \frac{2}{5} \end{array}\right..$$

Ta có 2 trường hợp:

- Nếu $b = 0$, ta có $a = 1$, dẫn đến $I(1;0)$, suy ra $C(3;-2)$. Phương trình đường thẳng CD tương ứng là $y + 2 = 0$.

- Nếu $b = \frac{2}{5}$, ta có $a = \frac{11}{5}$, dẫn đến $I\left(\frac{11}{5};\frac{2}{5}\right)$, suy ra $C\left(\frac{9}{5};\frac{-12}{5}\right)$. Phương trình đường thẳng CD tương ứng là $3x - 4y - 15 = 0$.

Vậy có 2 phương trình thỏa mãn là $y + 2 = 0$ và $3x - 4y - 15 = 0$.

Câu 8. Xét hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)}=12 \\ x^3-8x-1=2\sqrt{y-2} \end{cases}$.

Điều kiện xác định $\begin{cases} 12-y\ge 0, y-2\ge 0 \\ y(12-x^2)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\le y\le 12 \\ -2\sqrt{3}\le x\le 2\sqrt{3} \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất tương đương với $\sqrt{y(12-x^2)}=12-x\sqrt{12-y}$.

Bình phương 2 vế của phương trình này, ta được

$$y(12-x^2)=144-24x\sqrt{12-y}+x^2(12-y)$$
$$\Leftrightarrow 12y-144+24x\sqrt{12-y}-12x^2=0$$

Đặt $t=\sqrt{12-y}\ge 0$ thì $y=12-t^2$, ta đưa về

$$12(12-t^2)-144+24xt-12x^2=0$$
$$\Leftrightarrow -12t^2-12x^2+24xt=0$$
$$\Leftrightarrow x=t$$

Do đó ta được $x=\sqrt{12-y}\Leftrightarrow y=12-x^2$, thay vào phương trình 2 của hệ, ta được

$$x^3-8x-1=2\sqrt{10-x^2}.$$

Ta thấy hệ có nghiệm là $x=3$, ta sử dụng phương pháp lượng liên hợp như sau

$$x^3-8x-3=2\left(\sqrt{10-x^2}-1\right)$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+1)=\frac{2(9-x^2)}{\sqrt{10-x^2}+1}$$
$$\Leftrightarrow (x-3)\left(x^2+3x+1+\frac{2(x+3)}{\sqrt{10-x^2}+1}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ x^2+3x+1+\dfrac{2(x+3)}{\sqrt{10-x^2}+1}=0 \end{array}\right.$$

Phương trình thứ nhất có nghiệm là $x=3$, tương ứng ta có $y=3$, thỏa mãn điều kiện.

Chú ý rằng ở trên, ta có $x=t\ge 0$ nên phương trình thứ hai vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(x;y)=(3;3)$.

Hướng dẫn giải: TS. Huỳnh Công Thái, Nguyễn Minh Tùng, Trương Huy Hoàng, Nguyễn Tuấn Lâm, Lê Phúc Lữ, Lê Văn Đoàn, Đinh Thiện Tâm, Trần Anh Hào

Trung tâm Luyện thi Đại học Ngoại thương

www.docsachtructuyen.vn